Problema 5

Se tiene una placa conductora cuadrada de lado *L* y espesor *d* (*L>>d*). La carga de dicha placa es Q_1. Bajo el modelo de distribución plana infinita (¿qué supone considerar este modelo?):

a) Calcular las densidades de carga libre en condiciones estáticas.

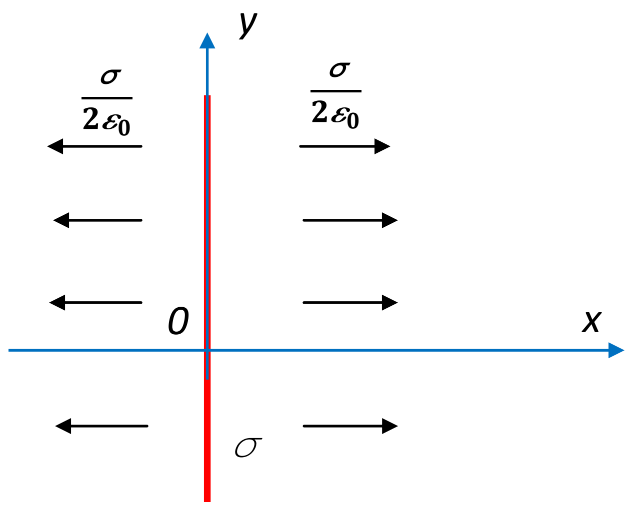
b) Calcular las densidades de carga libre si la misma placa estuviera enfrentada a una distribución plana de cargas de densidad superficial uniforme σ_0.

c) Calcular las densidades de carga libre si la misma placa estuviera enfrentada a otra placa metálica de iguales dimensiones pero con carga Q_2. ¿Qué sucede cuando $Q_2 = -Q_1$?

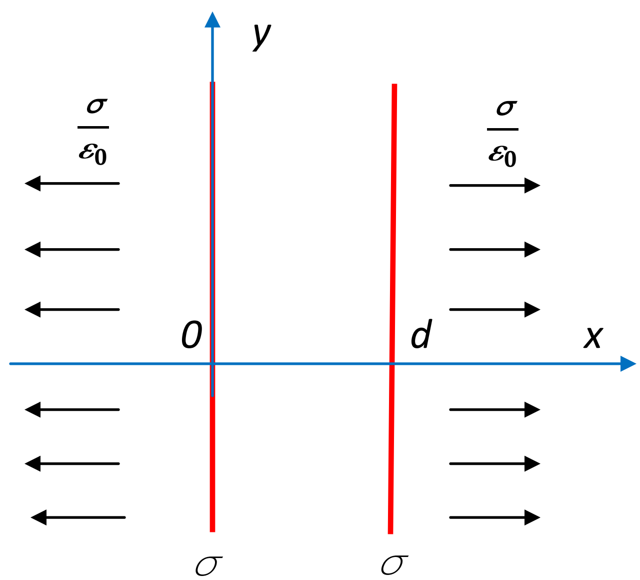
Notas preliminares

Puede mostrarse, usando superposición, que la única forma de obtener campo eléctrico nulo en la región entre dos planos paralelos infinitos con densidades uniformes σ_1 y σ_2 es que $\sigma_1 = \sigma_2$.
Por otra parte la única forma de obtener campo nulo fuera de la región entre los planos es que las densidades superficiales sean de igual módulo y opuestas, es decir $\sigma_1 = -\sigma_2$.

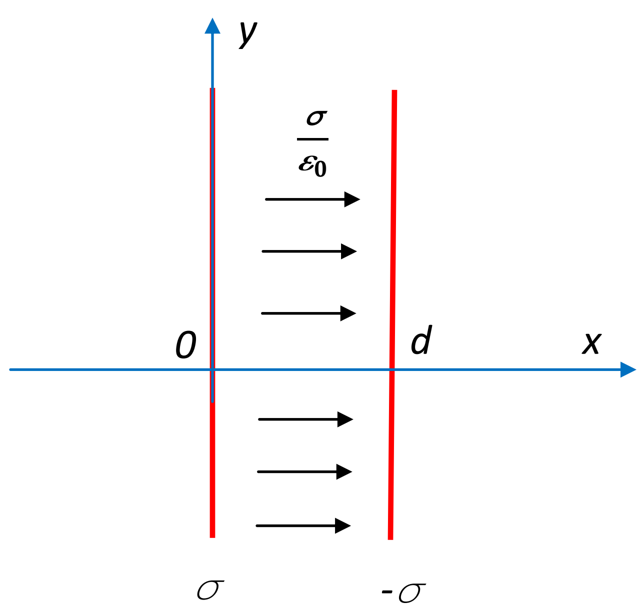
Antes de resolver el problema es conveniente recordar como es el campo de un plano infinito con una densidad superficial σ.
Y mostrar los resultados que se obtienen por superposición para el campo eléctrico de dos planos infinitos con densidades iguales σ y con densidades de igual módulo y opuestas σ y - σ.



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}, & x > 0 \\ \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}, & x > d \\ 0\hat{x}, & 0 < x < d \\ \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}, & x < 0 \end{cases}$$



$$\vec{E} = \begin{cases} 0\hat{x}, & x > d \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}, & 0 < x < d \\ 0\hat{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Ítem a: Hallar las densidades de cargas en la placa conductora de forma exacta no es fácil, sabemos que en condiciones electrostáticas las cargas se distribuyen en la superficie del conductor, pero la cuestión es ¿Cómo se distribuyen en la superficie?

Dado que $d << L$ podemos despreciar las densidades superficiales de carga en los cuatro bordes de la placa, así que solo consideramos densidades de carga en las dos caras de la placa conductora de área L^2. Como estamos despreciando los efectos de borde, modelamos la placa conductora como dos planos infinitos paralelos con densidades superficiales de carga uniformes σ_1 y σ_2 respectivamente, y separados una distancia d.

Sabemos que en condiciones electrostáticas se cumple que dentro del conductor el campo eléctrico es nulo. También que la carga en el conductor se mantiene constante ya que el mismo está aislado eléctricamente. Planteando estas dos condiciones obtendremos las densidades σ_1 y σ_2. Las ecuaciones son:

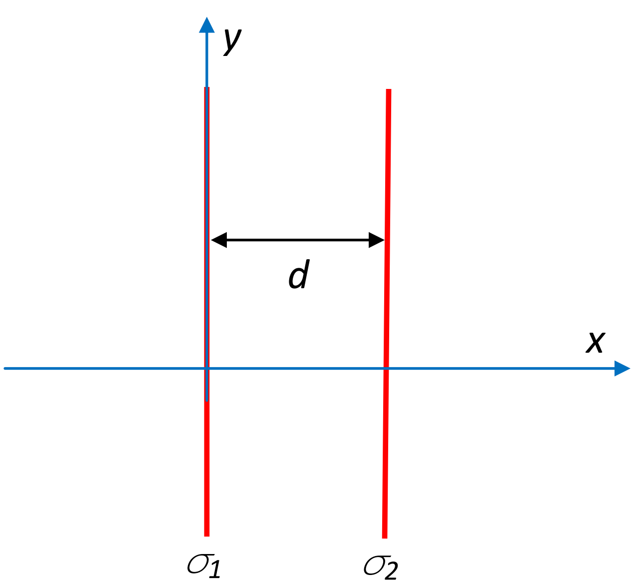


Figura 1

$$1a)\quad \frac{\sigma_1}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_2}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} = \vec{0}$$

$$2a)\quad \sigma_1\, L^2 + \sigma_2\, L^2 = Q_1$$

De 1a) se obtiene que

$$3a) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

Resultado esperado ya que de acuerdo a lo que observamos al comienzo, el campo total de dos planos infinitos se anula en la región entre los mismos solo cuando los planos tienen la misma σ.

Reemplazando 3a) en 2a) se llega a

$$\sigma = Q_1/\,(2\,L^2)$$

<u>Ítem b:</u> Las densidades superficiales no van a ser las mismas que cuando la distribución plana con densidad σ_0 no está presente ya que en ese caso tendríamos campo distinto de cero en el conductor (es decir entre los planos 1 y 2, ver figura 2), luego de un transitorio las cargas en el conductor tienen que distribuirse de manera tal que se anule el campo dentro del mismo en presencia de la distribución plana con densidad σ_0.

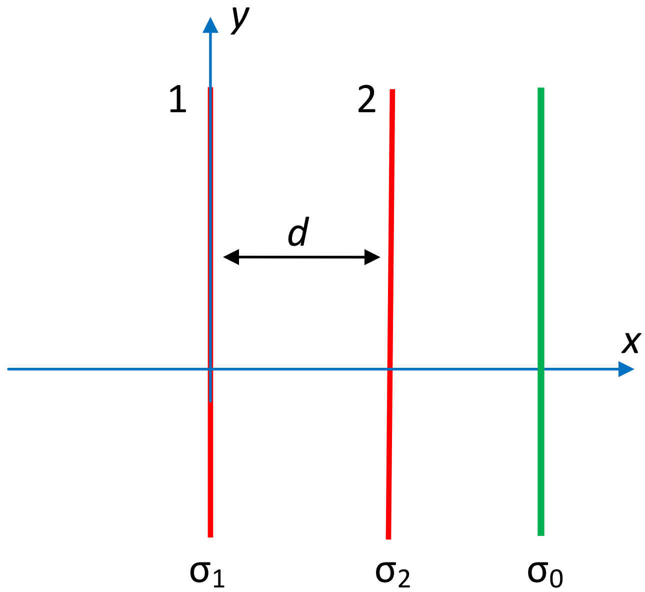


Figura 2

El planteo es el mismo volvemos a modelar nuestro conductor con dos planos infinitos paralelos con densidades σ_1 y σ_2 y planteamos la condición de campo eléctrico nulo dentro del conductor, es decir entre los dos planos, y la conservación de la carga en el conductor. En este caso las ecuaciones son:

$$1b) -\frac{\sigma_0}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_1}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_2}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad -\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2 = 0$$

$$2b) \quad \sigma_1 L^2 + \sigma_2 L^2 = Q_1 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 + \sigma_2 = Q_1/L^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2L^2} + \frac{\sigma_0}{2} \qquad\qquad \sigma_2 = \frac{Q_1}{2L^2} - \frac{\sigma_0}{2}$$

Analicemos el resultado. Si la distribución plana tiene densidad nula ($\sigma_0 = 0$) las densidades σ_1 y σ_2 son iguales, $\sigma_1 = \sigma_2 = Q_1/(2\,L^2)$, el mismo resultado del ítem a) como esperábamos.

Por otra parte si el conductor no tuviese carga ($Q_1 = 0$) las densidades son iguales en modulo y opuestas ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0/2$), lo cual puede ser entendido mediante las observaciones hechas en las notas preliminares. Si la carga del conductor es nula $\sigma_1 = -\sigma_2$ y la única forma en que los dos planos infinitos con densidades opuestas produzcan un campo entre ellos que cancele al de la placa en la zona entre los planos 1 y 2 es que esas densidades valgan

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0/2.$$

<u>Ítem c:</u> Se modela cada placa conductora con dos planos infinitos

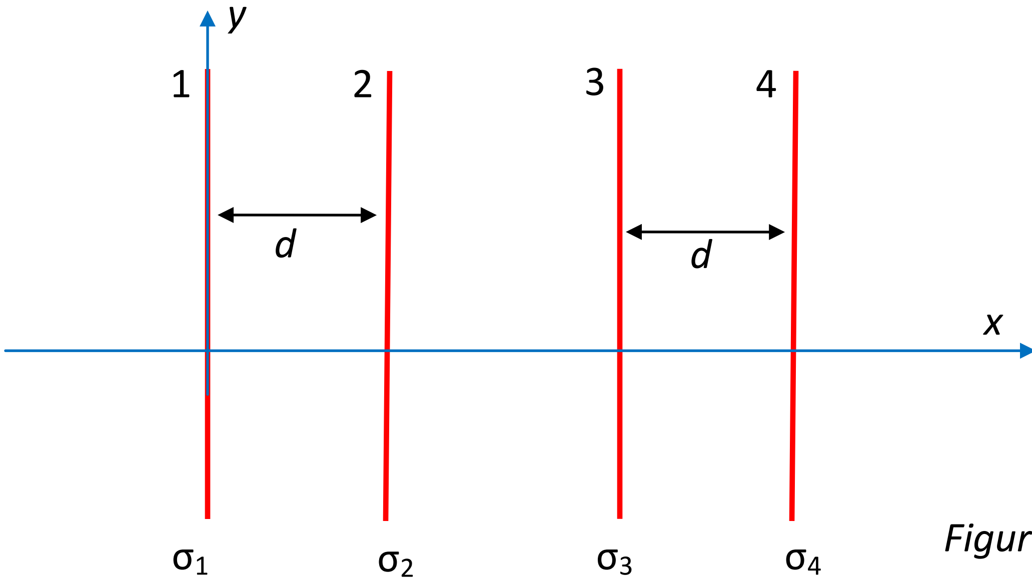


Figura 3

Campo cero en el conductor 1

$$1c)\quad \frac{\sigma_1}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_2}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_4}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} = \vec{0}$$

$$\rightarrow\ \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

Campo cero en el conductor 2

$$2c)\quad \frac{\sigma_1}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_2}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{\sigma_3}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} - \frac{\sigma_4}{2\,\varepsilon_0}\hat{x} = \vec{0}$$

$$\rightarrow\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$

Conservación de la carga en el conductor 1

$$3c)\quad \sigma_1 + \sigma_2 = Q_1/L^2$$

Conservación de la carga en el conductor 2

$$4c)\quad \sigma_3 + \sigma_4 = Q_2/L^2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2L^2} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2L^2}$$

En particular si $Q_2 = 0$ todas las densidades tienen el mismo módulo

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_4 = -\sigma_3 = Q_1/(2L^2)$$

Para el conductor 1 la situación es como en el ítem a), pero para el conductor 2 descargado la presencia del conductor 1 induce densidades de carga opuestas distintas de cero.

Si $Q = Q_1 = Q_2$, nos queda $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y $\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q}{L^2}$

El campo es nulo entre los planos 2 y 3, y es distinto de cero solo a la izquierda del plano 1 y a la derecha del 4. En este caso se obtiene el mismo campo que el correspondiente a una placa conductora con una carga 2 Q.

Si $Q = Q_1 = -Q_2$, nos queda $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$ y $\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{L^2}$

Solo hay campo entre los planos 2 y 3, en las otras zonas el campo es nulo.

El campo es distinto de cero solo en el espacio entre las placas conductoras.

Comentario final

Al resolver el ítem c encontramos que $\sigma_1 = \sigma_4$ y $\sigma_2 = -\sigma_3$. A partir de estas relaciones entre las densidades puede verificarse que el campo entre los dos conductores es determinado solo por σ_2 y σ_3 y el campo fuera de los dos conductores es determinado solo por las densidades superficiales σ_1 y σ_4.

Hay una forma alternativa de llegar a la relación que se debe cumplir entre las densidades σ_2 y σ_3 usando la ley de Gauss. Para eso tomemos como superficie Gaussiana *S* una caja rectangular de sección *A (en el plano y z),* como se indica en la figura 4

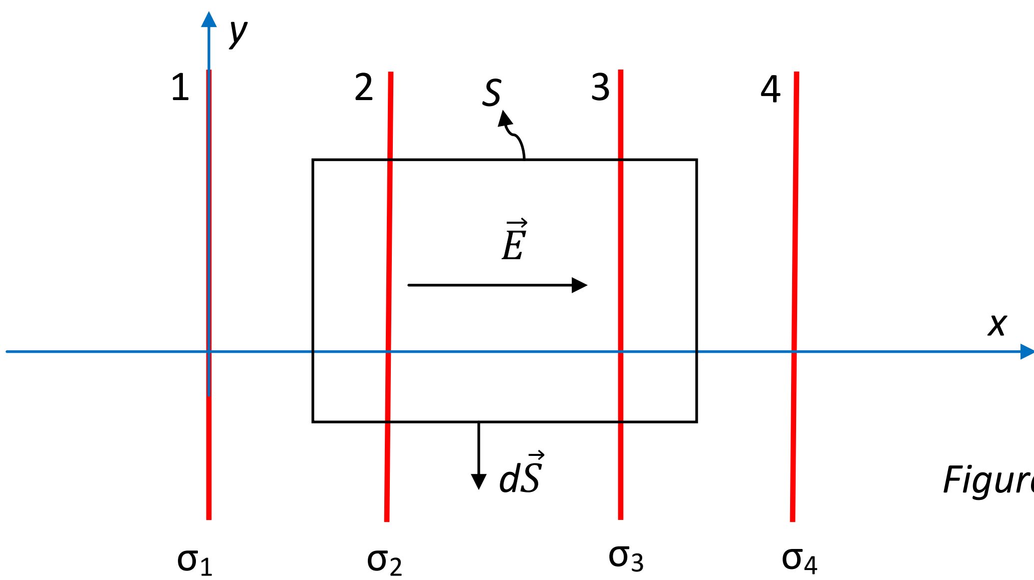


Figura 4

dentro de los conductores el campo es cero y fuera el campo en la superficie de la caja es perpendicular al diferencial de superficie así que el flujo de campo eléctrico es cero y es igual a la carga encerrada sobre ε_0, es decir

$$0 = \oiint_S \vec{\mathrm{E}}.\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2\, A + \sigma_3\, A}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto $\sigma_2 = -\sigma_3$, como sabemos dos planos infinitos con densidades opuestas no producen campo fuera de la región entre ellos. El campo total debido a los planos externos con densidades σ_1 y σ_4 respectivamente, no puede generar campo en la zona entre ellos para no violar la condición de campo nulo entre los planos 1 y 2 y los planos 3 y 4. Por las observaciones hechas en las notas preliminares, la única posibilidad es que las densidades de estos planos sean iguales, es decir $\sigma_1 = \sigma_4$. De acuerdo al resultado obtenido al resolver el ítem c, pero desde un punto de vista más conceptual que implica una mayor comprensión del problema.